● a)On sait:$(\cos\theta+ i\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$
D'où

$$Z^4 = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

$$Z^3 = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$Z^2 = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$$

b) d'après 2) a) on a : $Z^4 + Z = e^{i\frac{8\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}}$

$$= e^{i\frac{10\pi}{10}}(e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{-i\frac{3\pi}{5}})$$

$$Z^4 + Z = e^{i\pi}(2\cos\frac{3\pi}{5}) = (-1).2\cos(\pi - \frac{2\pi}{5})$$

$$= (-1).2[-\cos(\frac{2\pi}{5})] = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$$

Donc : $\boxed{Z^4 + Z = 2\cos(\frac{2\pi}{5})}$

De même on a :

$$Z^2 + Z^3 = e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}}$$

$$= e^{i\frac{5\pi}{5}}(e^{-i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{5}})$$

$$= e^{i\pi}(2\cos\frac{\pi}{5}) = -2\cos\frac{\pi}{5}$$

$$= 2\cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

Donc : $\boxed{Z^2 + Z^3 = 2\cos(\frac{4\pi}{5})}$

● a) On sait que : $1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0$

Donc : $1 + (Z + Z^4) + (Z^2 + Z^3) = 0$

Par suite en remplacent $(Z + Z^4)$ et $(Z^2 + Z^3)$ par les valeurs trouvées dans 2) b) on trouve :

$$1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0 \quad (I)$$

b) on sait que : $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

d'où $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos 2.\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$

Donc remplacent $\cos\frac{4\pi}{5}$ par $2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$ dans l'égalité (I) :

$$1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2(2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0 \quad (II)$$

Posons par suite $X = \cos(\frac{2\pi}{5})$ dans (II) on aura :

$$4X^2 + 2X - 1 = 0 \text{ et } X = \cos(\frac{2\pi}{5})$$

Donc $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est solution de: $4X^2 + 2X - 1 = 0$

c) Déterminant dans IR les solutions de l'équation

$4X^2 + 2X - 1 = 0$, en effet :

$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - (-4) = 5 > 0$ donc il y en a deux racines : $X' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $X'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

Comme $\frac{2\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$

On a $X' > 0$ et $X'' < 0$

Conclusion : $\boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

Exercice n° 17

$z_A = i$, $z_B = \frac{1+i}{2}$ et $z' = (1-i)z - 1$

● a) $|z'| = |(1-i)z - 1| = |(1-i)(z - \frac{1}{1-i})|$

$$= |1-i| \,.\, |z - \frac{1}{1-i}|$$

Avec : $|1-i| = \sqrt{2}$

Et $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = z_B$

Donc : $|z'| = \sqrt{2}\,.\,|z - z_B|$

Comme $|z'| = 2\sqrt{2}$ on aura $|z - z_B| = 2$ c'est-à-dire BM = 2

Il en résulte que M décrit le cercle ζ de centre B et de rayon 2

b) $\theta \in [0, \pi]$

pour $z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$,on a :

$z' = (1-i)z - 1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{i\theta} - 1$ et $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $z' = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} e^{i\theta} - 1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\theta} - 1$

$$= e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} - 1$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn